

# Équations différentielles en physique et chimie

Quelques idées pour le sujet des épreuves orales de l'agrégation de mathématiques portant sur les équations différentielles en physique chimie.

*C'est NEWTON qui nous a montré qu'une loi n'est qu'une relation nécessaire entre l'état présent du monde et son état immédiatement postérieur. Toutes les autres lois, découvertes depuis, ne sont pas autre chose ; ce sont en somme des équations différentielles.*

Henri POINCARÉ

## Contenu :

- Introduction
- Les grandeurs réduites et l'homogénéité des formules - Théorème de Vaschy-Buckingham
- Signification des grandeurs et des paramètres
- Équations différentielles en physique chimie – D'où viennent-elles ?
- Types d'équations – 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordres ; linéaires et non linéaires
- La radioactivité
- La cinétique chimique – Réactions d'ordre 1 et d'ordre 2
- Mécanique (point matériel) – Objet dans le champ de pesanteur, oscillateurs mécaniques
- L'électricité – Réponse d'un circuit à un échelon de tension, oscillations
- Thermodynamique – Conduction de la chaleur (Fourier), diffusion moléculaire (Fick)
- Électromagnétisme – Équations de Maxwell
- Une question importante et deux exemples moins classiques

## Introduction :

Les équations sont les mêmes qu'en mathématiques mais le traitement en est un peu différent.

Il est banal (mais discutable!) de dire que le physicien est moins soucieux de rigueur, qu'il se préoccupe peu de l'existence et de l'unicité des solutions (pourvu qu'il les trouve!)<sup>1</sup>.

Plus sérieusement, les problèmes de stabilité et de robustesse, le fait de savoir si une petite modification des paramètres entraîne seulement une petite modification des solutions sont importants. C'est que la connaissance des conditions initiales, notamment, ne peut être qu'approximative. On peut donc se demander si les résultats obtenus sont réellement fiables. C'est également le problème du chaos (sensibilité extrême aux conditions initiales) qui apparaît lors de la résolution de systèmes d'équations non linéaires.

Or, le physicien est obligé de faire des approximations. Le problème va se poser de savoir si l'équation différentielle obtenue<sup>2</sup> représente bien le comportement du système physique étudié<sup>3</sup>. Et il n'y a évidemment aucune raison que celui-ci obéisse à une équation simple.

Enfin, se placer dans l'espace des phases est souvent commode. Ce ne sera pas le cas dans ce document (essentiellement pour ne pas l'allonger à l'excès).

---

<sup>1</sup> Les mathématiciens envisagent les équations différentielles en toute généralité. Leurs travaux s'appuient sur des théorèmes d'accès difficile (Cauchy-Lipschitz, Poincaré-Bendixson, ...). Ils "reprochent" aux physiciens par exemple de ne jamais se préoccuper de l'existence d'intégrales singulières et d'admettre un peu rapidement un certain nombre de propriétés sans se soucier de la nature des équations différentielles utilisées. Il est vrai que celles étudiées en physique sont souvent linéaires, ce qui simplifie bien les choses.

<sup>2</sup> et, si possible, résolue !

<sup>3</sup> Ce point sera abordé au dernier paragraphe ("une question importante").

L'établissement d'une équation différentielle résulte de l'application de lois à un système physique. Celui-ci est simplifié et modélisé, les lois sont appliquées de façon approchée. La forme de la solution exacte est obtenue par détermination des constantes d'intégration par la prise en compte des conditions initiales (par exemple, valeur des variables à  $t = 0$ ), elles-mêmes connues avec des incertitudes. Bref, les approximations existent à tous les niveaux.

L'équation différentielle ne dépend pas en général des conditions (initiales). Toutefois, les solutions peuvent être très différentes selon les valeurs de départ. C'est ainsi que le mouvement d'un pendule lancé très fort (qui fait plus d'un tour) n'a pas grand chose à voir avec le régime des petites oscillations alors que l'équation différentielle est la même. En outre, il peut arriver que des variables soient couplées. Le choix du signe d'un paramètre peut être déterminé par des conditions aux limites sur  $x$  et imposer par exemple des contraintes de signe pour l'équation en  $y$  : on passe ainsi d'une solution exponentielle réelle (ou en sinus hyperbolique) à une solution sinusoïdale (ou exponentielle imaginaire).

Les notations du physicien peuvent être un peu différentes de celles des mathématiciens (voir aussi le problème des grandeurs dimensionnées).

Il est indispensable d'effectuer les applications numériques correspondant aux systèmes physiques réels. Un ordre de grandeur peut parfois suffire. Les unités utilisées sont toutes du système international SI (MKSA) sauf exception mentionnée comme le km/h.

Les systèmes étudiés s'étendent la plupart du temps sur un volume. Aux dimensions spatiales s'ajoute le temps. Dans la plupart des cas, on se retrouve donc devant un système d'équations aux dérivées partielles qui ne peut donner une équation différentielle que dans des cas particuliers (régime stationnaire, symétries, une seule coordonnée s'avère intéressante, ...).

Les systèmes ont souvent des symétries assez fortes (cylindriques, sphériques) qui imposent pratiquement l'utilisation de systèmes de coordonnées particulières dans lesquelles des fonctions spéciales (Bessel, harmoniques sphériques, polynômes de Legendre, ...) jouent un peu le même rôle que les fonctions trigonométriques dans les coordonnées cartésiennes.

Bien entendu, on considère la résolution de l'équation achevée quand on aboutit au calcul d'une intégrale ou à la détermination d'une courbe par exemple sous forme paramétrique [ $x(t)$  et  $y(t)$  au lieu de  $y(x)$ , coordonnées polaires, ...].

Enfin, il faut savoir que les exponentielles positives (dans le temps ou dans l'espace) sont la plupart du temps inacceptables : il n'est pas concevable qu'une grandeur physique devienne infinie pour de grandes valeurs du temps (ou d'une coordonnée).

## ➤ Les grandeurs réduites et l'homogénéité des formules

### Le problème des comparaisons

On ne peut comparer que des grandeurs de même nature : dire qu'une vitesse de 300 km/s est très grande devant une distance de 3 mm ou qu'un champ électrique de 10 V/m est très grand devant un champ magnétique de  $10^{-6}$  T n'a aucun sens.

Une température de 5000 K est celle d'une étoile froide, une fréquence de 20 kHz est grande pour l'oreille humaine, petite pour la transmission des ondes électromagnétiques.

### Grandeurs réduites

Les physiciens ont donc pris l'habitude d'utiliser des grandeurs réduites, rapports sans dimension d'une grandeur à la valeur d'une grandeur de même nature prise pour référence : par exemple,  $a = \omega/\omega_0$  avec  $\omega$  pulsation d'un signal de fréquence réglable et  $\omega_0$  pulsation

propre caractéristique du système étudié dépendant des valeurs des composants utilisés. Les automaticiens utilisent systématiquement de telles grandeurs (nombres purs). Les physiciens le font plus occasionnellement mais l'idée reste.

Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM (ou théorème  $\Pi$ ) donne une assise théorique aux développements qui suivent. Il n'est pas question d'en donner un énoncé complet et exact. En gros, il affirme que toute loi physique peut s'exprimer sous la forme :  $\Pi[a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \dots] = \text{cte}$  a, b, c, ... étant des grandeurs réduites,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  les exposants associés (entiers ou non) et  $\Pi$  désignant un produit.

Le théorème  $\Pi$  légitime le recours aux grandeurs réduites. La difficulté est dans le caractère général de l'expression et dans le nombre de relations et de grandeurs (pertinentes) associées.

#### Fonctions mathématiques

Pour le physicien, à strictement parler, les fonctions mathématiques ne peuvent concerner que des variables sans dimension<sup>4</sup> : par exemple, dans les développements en série entière qui additionnent  $x, x^2, x^3, \dots, x$  ne peut être que sans dimension. Sinon, comment ajouter des longueurs, des surfaces, des volumes, .. ?  $\text{Ln}(x)$  n'a de sens que si  $x$  est un nombre sans dimension : le physicien écrira :  $\text{Ln}\left(\frac{x}{x_0}\right)$ .

### ➤ Signification des grandeurs et des paramètres

Notations : Sans aller jusqu'aux grandeurs réduites, le physicien fait intervenir des grandeurs fonctions des caractéristiques du système étudié.

Par exemple, l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants qui peut s'écrire en mathématiques :  $a.x'' + b.x' + c.x = 0$  devient en physique :  $x'' + 2\lambda.x' + \omega_0^2 x = 0$ . En effet, le plus souvent, pour les systèmes ayant une réalité concrète, a, b et c sont positifs<sup>5</sup>. Les coefficients  $\lambda$  et  $\omega_0$  sont respectivement interprétés comme un paramètre caractérisant un frottement fluide (ou visqueux car directement lié à la viscosité de celui-ci dans le cas où le freinage est ainsi réalisé<sup>6</sup>) et la pulsation propre de l'oscillateur harmonique (sans frottements) associé.

#### Mise en évidence de valeurs caractéristiques par analyse dimensionnelle

L'analyse peut être subtile. Par exemple, en mécanique des fluides, le transport de matière peut se faire de deux façons : la diffusion (les concentrations ont tendance à s'égaliser) et la convection (mouvements macroscopiques de matière). L'équation de la diffusion est, n étant la concentration en nombre de molécules par mètre cube :  $\partial n / \partial t = D.\Delta n$  (ou  $\partial^2 n / \partial x^2$ ). Il est facile de vérifier que le coefficient D a pour unité le  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ . Si on dispose d'une distance L typique,  $\tau = L^2/D$  devient un temps caractéristique du phénomène. Supposons qu'on ouvre un flacon de parfum dans une pièce : L est de l'ordre de quelques mètres. Au bout de moins d'une minute, on sent le parfum à l'autre bout de la pièce. Les tables donnent comme valeur des coefficients D de différentes molécules dans l'air  $D \sim 0,3 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ . Pour  $L = 3 \text{ m}$ ,  $\tau = L^2/D = 2,7.10^6 \text{ s} \approx 747 \text{ h}$ . Cette valeur n'est pas compatible avec les observations. On peut en conclure que la propagation de l'odeur du parfum ne se fait pas par diffusion.

<sup>4</sup> Voir par exemple en chimie le délicat problème de l'écriture des constantes d'équilibre sans unités. Par ailleurs, "sans dimension" ne veut pas dire "sans unité" : un angle a des unités (rad, degré, ...) mais il est sans dimension. Dans une certaine mesure, il en est de même de la température et des quantités de matière (nombres de moles).

<sup>5</sup> Ce n'est pas toujours le cas : pour l'oscillateur dit à résistance négative,  $b/a = 2\lambda$  est négatif. Mais il s'agit presque d'une curiosité, d'un système dans lequel il faut injecter de la puissance.

<sup>6</sup> car le freinage par courants de Foucault est plus conforme au modèle et souvent plus commode.

Grandeurs manipulées. Certaines sont évidentes : position, vitesse, force, .... D'autres sont plus inhabituelles ou moins intuitives..

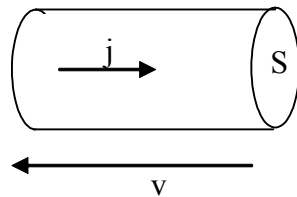
En électromagnétisme, il y a des charges et des courants électriques. Les charges se mesurent en coulomb (C) : charge élémentaire  $e \approx 1,6 \times 10^{-19}$  C (charge de l'électron  $-e$ ).

L'espace peut être rempli de charges, par exemple d'électrons : densité de charge  $\rho = -ne$  (n en nombre de particules par  $m^3$ ,  $\rho$  en  $C.m^{-3}$ ). Remarquons que  $\rho$  est ici négative.

Les courants sont caractérisés par le vecteur densité de courant  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  avec  $\rho = -ne$

Le flux de  $j$  à travers  $S$  est en  $C.m^{-3}.m^3.s^{-1}$  : c'est le courant électrique en  $C.s^{-1}$  ou ampère (A) :

$I = \vec{j} \cdot \vec{S}$ . Il est fréquent que la signification des flux soit plus facile à saisir.



### ➤ Equations différentielles en physique et chimie

La résolution peut donner :

- l'évolution du système en fonction du temps qui est la variable (cas fréquent)
- la caractéristique d'un composant : par ex. tension courant  $I = f(U)$
- la forme d'une courbe : trajectoire, rayon lumineux, jet de particules, ...

Ces équations sont établies par application des lois de la physique aux systèmes.

#### Mécanique

Quantité de mouvement point matériel  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$       Système :  $\vec{p} = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$

Relativité (Einstein)  $\vec{p} = \gamma m \cdot \vec{v}$  avec  $\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}$

Lois de Newton : point matériel  $m \vec{a} \left( = \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \sum \vec{F}$

système :  $m \vec{a}_G \left( = \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \sum \vec{F}$

En relativité, la relation  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$  reste mais  $\sum \vec{F}$  n'est plus proportionnelle à l'accélération.

Théorème des moments : point matériel M  $\vec{OM} \wedge \sum \vec{F} = \frac{d}{dt} [\vec{OM} \wedge m\vec{v}]$

Conservation de l'énergie, théorème de l'énergie cinétique

#### Mécanique des fluides

La loi de Newton et le théorème des moments donnent les relations d'Euler.

La conservation de l'énergie (ou le th.de l'énergie cinétique) donne l'équation de Bernoulli.

L'équation générale pour les fluides visqueux donne l'équation de Navier-Stokes.

#### Thermodynamique

Équation de la chaleur, loi de Fourier ; équation de la diffusion, loi de Fick.

Électromagnétisme : Les équations de Maxwell régissent le comportement du système :

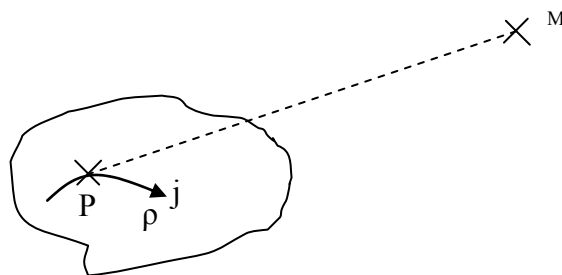
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

La 3<sup>ème</sup> équation signifie que le flux du champ électrique, intégrale de sa divergence, vaut la charge divisée par la constante  $\epsilon_0$  : le flux de ce champ à travers une surface fermée ne contenant pas de charges est conservatif.

Les charges et les courants au point courant P étant imposés, les solutions au point M sont :

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \text{avec}$$

$$V(M, t) = \int \frac{\rho(P, t - MP/c)}{4\pi\epsilon_0 MP} d^3P \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \int \frac{\vec{j}(P, t - MP/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 MP} d^3P$$



En l'absence de charges ( $\rho = 0$  ;  $j = 0$ ) et avec une condition sur  $\vec{A}$  et  $V$  (jauge), on obtient une équation d'onde de d'Alembert  $\left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E} = 0$  et même chose avec  $B$ ,  $V$  et  $A$ . On note

souvent l'opérateur d'alembertien  $\left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] = \square$

Optique : équation des rayons lumineux

Mécanique quantique : équations de Schrödinger, de Klein-Gordon, de Dirac.

Principes variationnels

Toutes ces lois peuvent aboutir à des équations différentielles.

### ➤ Types d'équations

Les équations linéaires sont les plus fréquentes.

Dans les modèles simples, ce sont des équations à coefficients constants.

Certains systèmes font intervenir des coefficients dépendant du temps (par ex. oscillateurs paramétriques).

Le physicien tient pour acquis que la solution générale d'une équation différentielle d'ordre  $n$  (c'est-à-dire faisant intervenir des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ ) dépend de  $n$  constantes arbitraires : la solution générale vérifie l'équation quelles que soient les valeurs données à ces constantes.

Il est rare que l'ordre soit supérieur à 2 ; rares cas connus, en électricité lorsqu'on fait intervenir l'inductance d'appareils de mesure (ordre 3 ; exemple formel, sans grand intérêt) et en résistance des matériaux (ordre 4).

En dynamique, si le mouvement obéit à une équation d'ordre 3, il faut 3 conditions initiales pour déterminer la solution exacte, ce qui n'est pas très facile à imaginer.

**Les équations non linéaires** se rencontrent notamment en mécanique des fluides (équations de NAVIER-STOKES).

Une équation assez célèbre modélise le comportement des oscillateurs auto-entretenus : c'est l'équation de VAN DER POL qui eut son heure de gloire dans les années 1920, c'est-à-dire à la naissance de la radio.

$$x'' + 2\lambda \left( \frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) x' + \omega_0^2 x = 0$$

Le coefficient de  $x'$  est négatif ou positif selon les valeurs de  $x$  : quand  $x$  prend des grandes valeurs, le coefficient de  $x'$  est positif et les oscillations sont amorties ; quand  $x$  est petit, les oscillations ont une amplitude croissante. On peut espérer une stabilisation pour une amplitude de  $x$  de l'ordre de  $x_0$  (en réalité, un calcul plus fin donne  $2x_0$ )

Il est difficile de pousser suffisamment loin les calculs pour les équations non linéaires, au moins dans le cadre de notre étude. Quelques exemples sont néanmoins proposés.

➤ **La radioactivité** : la désintégration, un processus aléatoire<sup>7</sup>.

On dispose d'une population de  $N$  noyaux radioactifs, c'est-à-dire se désintégrant selon un processus aléatoire : le nombre de désintégrations par unité de temps ne dépend que du nombre de noyaux existant et lui est proportionnel (si on double le nombre de vivants, il y a

deux fois plus de morts) :  $\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$ . La solution est évidemment  $N = N_0 \cdot \exp(-\lambda t)$ ,  $N_0$

étant le nombre de noyaux à l'instant 0 origine.

La loi n'est vraie qu'en moyenne, étant entendu que des fluctuations existent.

On appelle  $\lambda$  constante radioactive. On fait intervenir la demie vie (autrefois période)  $\tau$ , temps au bout duquel la moitié des noyaux a disparu  $\forall t, N(t + \tau) = \frac{1}{2} N(t) : \exp(-\lambda \tau) = \frac{1}{2}$  d'où  $\tau = \ln 2 / \lambda = 0,69 / \lambda$ . Le  $\forall t$  est important : si  $\tau$  dépend de  $t$ , cette notion n'a aucun intérêt.

On peut montrer que  $\tau$  est également la durée de vie moyenne d'un noyau.

Au bout de 7 ou 8  $\tau$ , on estime qu'il n'y a plus rien.

La demi-vie est une des rares grandeurs physiques susceptibles de prendre des valeurs sur un grand nombre d'ordres de grandeur : de quelques microsecondes à plusieurs milliards d'années. Rappelons que les isotopes (souvent cités parce que particulièrement dangereux) 90 et 137 respectivement du strontium et du césium ont des demi-vies de 29 et 30 ans.

➤ **La cinétique chimique**

Il s'agit de trouver l'évolution dans le temps des concentrations, le plus souvent, parfois de quantités de matière (nombre de moles) ou de pressions partielles.

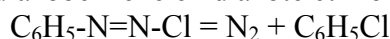
Le choix de réactions, pour la plupart d'entre elles peu connues ou rarement rencontrées, peut surprendre. Mais la grande majorité des réactions a une cinétique extrêmement complexe et souvent mal connue ou inconnue.

---

<sup>7</sup> L'étude de ce phénomène avait été choisie en mathématiques pour introduire l'exponentielle (puis le logarithme) dans le second degré.

**Réactions d'ordre 1** : elles sont rares

Décomposition du chlorure de diazobenzène en diazote et monochlorobenzène



et décomposition de l'anhydride nitrique en dioxyde d'azote et dioxygène.

La concentration vérifie la loi (voir la radioactivité) :  $\frac{dc}{dt} = -k.c$  avec  $k = 2,7.10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

Si  $x$  est le degré d'avancement  $x$  :  $c = c_0(1 - x)$   $\frac{dx}{dt} = -k.c_0(1 - x)$  d'où  $x = 1 - \exp(-kt)$ .

**Réactions d'ordre 2** : ce peut être 2 globalement ou 2 par rapport à un seul réactif.

Soit une réaction  $A + B = C + D$ . On suppose que  $[A]$ ,  $[B]$ , .. (quantités de matière=nombre de moles, concentrations, ...) mesurent les quantités de réactifs.

○ **Ordre 2 global** :  $d[A]/dt = -k[A]^\alpha . [B]^\beta$  ou  $dc/dt = k[A]^\alpha . [B]^\beta$  avec  $\alpha + \beta = 2$

Une réaction très étudiée est la fabrication du savon : saponification d'un ester en milieu basique :



L'avancement de la réaction est mesuré par  $c = [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]$  (car il apparaît en même temps une molécule d'alcool et un ion).

On suppose qu'à  $t = 0$ ,  $[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5] = a_0$  et  $[\text{HO}^-] = b_0$

À  $t > 0$ ,  $c$  étant l'avancement mesuré en  $\text{mol.L}^{-1}$   $[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5] = a_0 - c$  et  $[\text{HO}^-] = b_0 - c$  car

il part une molécule d'ester pour un ion  $\text{HO}^-$ .  $\frac{dc}{dt} = k(a_0 - c).(b_0 - c)$

avec  $k = 0,107 \text{ L.mol}^{-1} . \text{s}^{-1}$  d'où

$k.dt = \frac{dc}{(a_0 - c)(b_0 - c)}$  Or  $\frac{1}{(a_0 - c)(b_0 - c)} = \frac{1}{b_0 - a_0} \left[ \frac{1}{a_0 - c} - \frac{1}{b_0 - c} \right]$ . On obtient

$$kt = \frac{1}{b_0 - a_0} \ln \left[ \frac{b_0 - c}{a_0 - c} \cdot \frac{a_0}{b_0} \right] \text{ d'où } c = \frac{b_0 [1 - \exp((b_0 - a_0)kt)]}{1 - \frac{b_0}{a_0} \exp((b_0 - a_0)kt)}$$

Remarquons que si le réactif A est en large excès,  $[A]$  varie peu et peut être considérée comme constante. Au contraire,  $[B]_{(0)}$  est faible et toute variation est relativement importante. On a alors une cinétique d'ordre 1 par rapport à B.

○ **Ordre 2 par rapport à 1 réactif** :  $\frac{d[A]}{dt} = -k.[A]^2$

Ex décomposition du dioxyde d'azote  $2\text{NO}_2 = 2\text{NO} + \text{O}_2$ . On note  $[\text{NO}_2] = [A]$

À  $t = 0$ ,  $[A]_{(0)} = a_0$  ; à  $t > 0$ ,  $[A]_{(t)} = a_0 (1-x)$  ce qui donne

$$\frac{dx}{dt} = k.a_0(1-x)^2 \text{ donc } \frac{dx}{(1-x)^2} = k.a_0 dt \text{ soit } \frac{x}{a_0(1-x)} = k.t \Rightarrow x = \frac{a_0 kt}{1 + a_0 kt}$$

Le temps de demi-réaction  $\tau$  correspond à  $x = \frac{1}{2}$  :  $\tau = \frac{1}{a_0.k}$  varie comme l'inverse de la concentration initiale, signe d'une cinétique d'ordre 2.

**Intérêt de la cinétique** : Il ne s'agit pas uniquement de déterminer l'évolution du système en fonction du temps. L'étude de l'influence des grandeurs caractéristiques du système sur la vitesse de réaction a une autre importance.

Pour simplifier, on admet que si le mécanisme, au niveau microscopique, est correctement décrit par l'équation chimique, l'ordre est égal au coefficient (stœchiométrique) dans l'équation. La réciproque n'est pas vraie. Mais, en gros, si les molécules  $\text{NO}_2$  s'entrechoquent

et que ce sont ces chocs qui donnent la réaction, la probabilité de réaction varie comme les chances qu'a une molécule d'en rencontrer une autre. D'où une vitesse en  $[A]^2$ . La cinétique permet de conjecturer ce qui se passe au niveau microscopique ou, au moins, de faire des hypothèses raisonnables et, dans les cas favorables, d'accéder à la connaissance des mécanismes.

### ➤ La mécanique (mécanique du point)

#### Chute dans un champ de pesanteur uniforme.

Pour obtenir une équation différentielle, il faut se placer dans le cas de mouvements linéaires<sup>8</sup>. Mais il peut arriver que, à 2 ou 3 dimensions, les équations soient découplées.

Chute libre d'un objet (supposé ponctuel) dans le champ de pesanteur supposé uniforme.

Seule force exercée le poids :  $\sum \vec{F}$  se réduit à  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

Principe fondamental de la dynamique  $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$

Coordonnées : Ox Oy et Oz (vertical vers le haut) On peut simplifier par m (masse

gravitationnelle = masse inerte) d'où le système 
$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ z'' = -g \end{cases}$$
. L'intégration dépend des condi-

tions initiales.

Si on lâche l'objet en O à  $t = 0$  sans vitesse initiale, on obtient  $x = y = 0, z = -\frac{1}{2}gt^2$ .

Si l'objet a une certaine vitesse  $v_0$  colinéaire à Oz, idem  $x, y$  et  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ .

Si on lance l'objet avec  $v_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal xOy. On peut toujours choisir le plan yOz contenant  $v_0$ . On obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}' = 0 \\ \dot{y}' = v_0 \cdot \cos \alpha \\ \dot{z}' = -gt + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = v_0 \cdot t \cos \alpha \\ z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \cdot t \sin \alpha \end{cases}$$

L'élimination du temps entre les expressions de y et z donnent l'équation de la trajectoire (parabole).

#### Force de frottement aux faibles vitesses (force de Stokes).

L'action du fluide peut être représentée par une force opposée à la vitesse et proportionnelle à celle-ci :  $\vec{F} = -k \cdot \vec{v}$ . Ce coefficient k dépend de la viscosité  $\eta$  (mesurée en poiseuilles Pl) du fluide : pour une sphère de rayon R tombant dans le fluide contenu dans un grand<sup>9</sup> récipient, on peut montrer que  $k = 6\pi R\eta$ .

$$\begin{cases} x'' = -(k/m) \cdot x' \\ y'' = -(k/m) \cdot y' \\ z'' = -g - (k/m) \cdot z = -(k/m)(z' - v_L) \end{cases}$$

en posant  $v_L = -m \cdot g/k$ , vitesse limite telle que la force de frottement s'oppose au poids  $P = k|v_L|$

<sup>8</sup> ou curvilignes

<sup>9</sup> Dans le cas contraire, les déplacements de fluide qui frotte sur les parois vont se faire avec difficulté et des corrections (Oseen) sont à effectuer.

$$\begin{cases} x' = x'_0 \cdot \exp[-(k/m)t] = 0 \\ y' = y'_0 \cdot \exp[-(k/m)t] = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \exp[-(k/m)t] \\ z' = (v_0 \sin \alpha - v_L) \cdot \exp[-(k/m)t] + v_L \end{cases}$$

Trajectoire avec une asymptote verticale  $y = mv_0 \sin \alpha / k$ ,  $\tau = m/k$  étant homogène à un temps. On pourrait d'ailleurs utiliser  $\tau$  comme temps caractéristique.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{mv_0 \sin \alpha}{k} [1 - \exp(-(k/m)t)] \\ z = \frac{m}{k} (v_0 \sin \alpha - v_L) [1 - \exp(-(k/m)t)] + v_L t \end{cases}$$



Si  $k \rightarrow 0$ , on retrouve les résultats précédents.

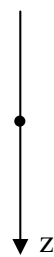
On peut évidemment rester à une seule dimension : chute d'une bille dans de l'huile  $v_0 = 0$ .

Oz vers le bas :  $mz'' = mg - kz'$ . Soit  $u_L = mg/k$ , valeur que prend la vitesse quand l'accélération  $z''$  est nulle : c'est la vitesse limite dont la mesure permet souvent de déterminer le coefficient  $k = 6\pi R\eta$ .

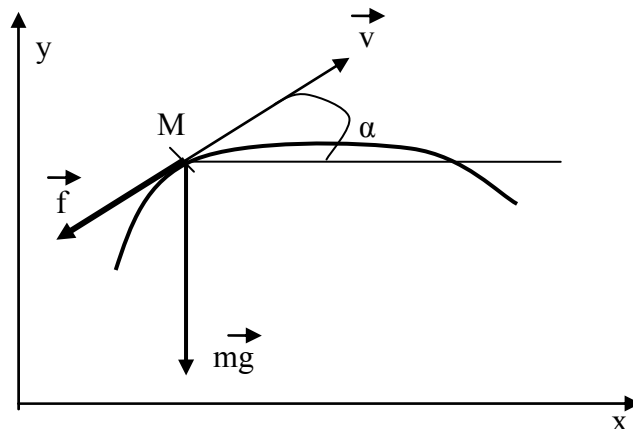
$$\underline{z'' = -k(z' - u_L)} \Rightarrow z' = u_L [1 - \exp(-(k/m)t)] \text{ et}$$

$$\underline{z = u_L t + m \cdot u_L / k [1 - \exp\{-(k/m)t\}]}$$

Pour une sphère de métal, la force de Stokes varie comme le rayon et le poids comme le cube de celui-ci. Donc, la bille de grande taille descend beaucoup plus vite. Dans la glycérine ( $\eta = 1 \text{ Pl}$ ), une bille d'acier de rayon 1 cm a la vitesse limite  $1,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et une de rayon 2 mm  $0,07 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .



Aux vitesses plus importantes, la force  $f(v)$  est opposée à la vitesse et varie (par exemple) comme une puissance de celle-ci (on exclut les forces du type MAGNUS). Les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes ne sont plus découplées et l'intégration est plus difficile, parfois seulement possible numériquement. Il est à peu près évident que le mouvement est plan et qu'il faut se placer dans le système des coordonnées locales de Frenet (s abscisse curviligne,  $\alpha$  angle de  $v$  avec l'axe des x, R rayon local de courbure de la trajectoire) :



$$\begin{cases} mv' = -f(v) - mg \sin \alpha \\ \frac{mv^2}{R} = mg \cos \alpha \quad (R > 0) \end{cases} \quad \text{Or } R = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = -\frac{v}{\alpha'} \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} v' = -\frac{f(v)}{m} - g \sin \alpha \\ v\alpha' = -g \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{dv}{d\alpha} = v \cdot \frac{f(v)/m + g \sin \alpha}{g \cos \alpha} \quad \text{qui permet d'obtenir } v(\alpha) \text{ connaissant } v_0 \text{ et } \alpha_0$$

$$D'où dt = -\frac{v}{g \cos \alpha} d\alpha \Rightarrow t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v}{g \cos \xi} d\xi \quad \text{et}$$

$$dx = v \cos \alpha dt \Rightarrow x = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v^2}{g} d\xi \quad \text{et} \quad dy = v \sin \alpha dt \Rightarrow y = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v^2}{g} \tan \xi d\xi$$

La chute verticale donne évidemment des équations plus facilement intégrables (on fait souvent intervenir la vitesse limite  $v_L$ ). Prenons le cas où  $f(v)$  est quadratique (les autres cas se traitent de façon analogue) :

$$mz'' = mg - Az^2. \quad \text{De même, } v_L = (mg/A)^{1/2} \text{ donne } \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{A}{m} dt \text{ d'où}$$

$A \cdot v_L t / m = \text{Arg th}(v/v_L)$  donc  $v = v_L \cdot \text{th}(A v_L t / m) = v_L \text{ th}(t/\tau)$  avec  $\tau = m/A \cdot v_L$  qui est un temps caractéristique. L'intégration de la tangente hyperbolique donne, sauf erreur, un  $\text{Ln}(\text{ch})$ .

Pour un parachutiste, pendant la première phase du mouvement (avant que le parachute s'ouvre),  $k = 0,12 \text{ SI}$  : ordre de grandeur  $v_L = (mg/k)^{1/2} = 90 \text{ m.s}^{-1} = 330 \text{ km/h}$ , ce qui est effectivement le cas.

Mouvement d'une particule chargée (charge  $q$ ) dans un champ électrique accélérateur.

La seule force est la force accélératrice est  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

En mécanique newtonienne, *mutatis mutandis*, les résultats sont identiques à ceux de la chute dans un champ de pesanteur uniforme.

Mais les électrons ont une inertie (masse) faible et atteignent facilement des vitesses de l'ordre de celle de la lumière. Ils sont alors relativistes et vérifient les relations d'Einstein. Le

principe fondamental s'écrit  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$  avec  $\vec{p} = \gamma m \cdot \vec{v}$  si  $\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}$ .

La dérivée de la quantité de mouvement vaut, en projection, tous calculs faits :

$$\frac{dp}{dt} = m \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-3/2} \cdot \frac{dv}{dt} \text{ donc } \frac{dv}{\left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{3/2}} = \frac{qE \cdot dt}{m}. \text{ Posons }^{10} \sin \varphi = v/c \text{ donc } dv = c \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{qE}{mc} dt. \text{ Par intégration, si } v = 0 \text{ à } t = 0, \tan \varphi = \frac{qEt}{mc}, \text{ soit } \tan[\text{Arc sin } \frac{v}{c}] = \frac{qEt}{mc} \text{ et}$$

$$v = c \cdot \sin \text{Arc tan } \frac{qEt}{mc}. \text{ Par ailleurs, on peut montrer que } \sin(\text{Arc tan } u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

$$\text{On obtient finalement } v = c \cdot \frac{\frac{qEt}{mc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2}} \text{ qui devient asymptotiquement } c \text{ pour } t \rightarrow \infty.$$

On retrouve évidemment l'expression newtonienne pour  $c \rightarrow \infty$ .

<sup>10</sup> Le calcul peut également se faire en posant  $\text{th } \psi = v/c$  (au lieu de  $\sin \varphi$ ).

## Les oscillateurs

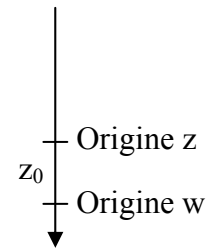
Oscillations libres : un ressort exerce une force opposée et proportionnelle à l'allongement du ressort :  $F_1 = -kx$ .

- Si on néglige les frottements, l'équation  $m\vec{a} = \sum \vec{F}$  donne  $mx'' = -kx$

Soit  $x'' + \omega_0^2 x = 0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , pulsation propre de l'oscillateur sinusoïdal

(harmonique). L'intégrale générale est  $x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $x_0$  et  $\varphi$  étant déterminés par les conditions initiales (position et vitesse à l'instant  $t = 0$  par exemple)

L'oscillateur peut être horizontal (masselotte qui glisse sans frottement sur une tige) ou vertical (pendule élastique). Dans ce cas, on prend pour origine de l'axe des  $z$ , par exemple orienté vers le bas, le point origine correspondant au ressort ayant sa longueur naturelle. Immobile, la masselotte allonge le ressort de  $z_0$  :  $mg = kz_0$  et  $0 = -kz_0 + mg$ .



On change d'origine  $w = z - z_0$  et on retrouve l'équation précédente.

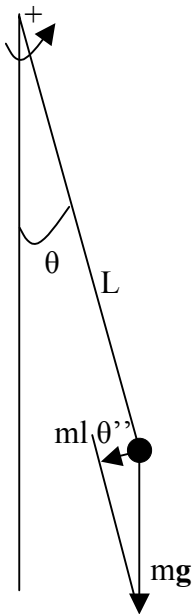
Ordres de grandeur  $k = 50 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m = 0,1 \text{ kg}$ ,  $\omega_0 = 22 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $f_0 = 3,6 \text{ Hz}$ .

- Les frottements (fluides) peuvent être représentés par la force opposée à la vitesse et proportionnelle à celle-ci (Stokes)  $F_2 = -Av$ .

Le principe fondamental donne  $mx'' = -kx - Ax'$  d'où l'équation  $x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0$ . La résolution ne pose pas de problèmes particuliers, le physicien distinguant :

- les oscillations amorties en  $\exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \varphi)$  avec  $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$  étant entendu que, pour les systèmes physiques courants,  $\omega_0$  et  $\omega$  sont peu différents. Les amplitudes des maximums décroissent en gros comme l'exponentielle  $\exp(-\lambda t)$ .
- le régime apériodique (recherché dans l'amortissement des automobiles).  $\tau = 1/\lambda$  apparaît comme un temps caractéristique.

## Le pendule simple



L'équation s'obtient en écrivant la projection du poids sur la tangente à la trajectoire :

$ml\theta'' = -mg \sin\theta$  (- car, si  $\theta$  est positif, le poids fait tourner dans le sens négatif et dans le sens positif si  $\theta$  est négatif).

▪ Petites oscillations :  $L\theta'' = -g\theta$  équation d'un oscillateur harmonique

$\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$ . La période  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  est indépendante de l'amplitude des

oscillations (isochronisme). Cette propriété est souvent approximativement vérifiée : plus l'amplitude est grande, plus le chemin à parcourir est important mais plus le mobile va vite : l'un compense l'autre. Pour l'oscillateur harmonique, elle l'est exactement. Ordres de grandeur :

$L = 1 \text{ m}$ ,  $T_0 \approx 2 \text{ s}$  (un pendule de longueur 1 m bat la seconde)

▪ Oscillations de grande amplitude : on peut montrer que la période  $T$  est voisine de  $T \approx T_0 \left[ 1 + \frac{\theta^2}{16} \right]$ .

Il existe des forces de frottement analogues à celles agissant sur l'oscillateur linéaire.

Le pendule pesant (pour lequel la masse oscillante n'est pas assimilable à un point : moment d'inertie par rapport à l'axe  $J$ ) obéit à une équation analogue  $J\theta'' = -mg.\sin\theta$ .

Oscillations paramétriques : Une des grandeurs varie sinusoidalement. C'est le cas du botafumeiro de St Jacques de Compostelle, assimilable à un pendule simple de longueur :  $L = L_0.(1 + \varepsilon.\sin \omega t)$ . C'est également le cas du gamin seul sur une escarpolette qui, en pliant les jambes, fait varier son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

La solution fait intervenir les fonctions de Mathieu.

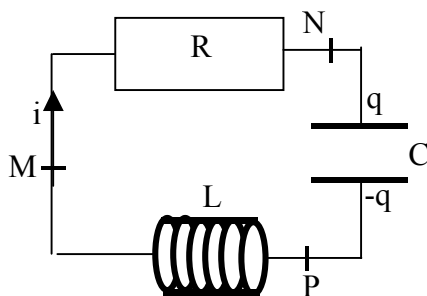
Oscillations forcées : On impose une excitation sinusoidale : voir l'électricité.

On obtient une équation différentielle avec second membre. La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète<sup>11</sup>. Dans la pratique, la première partie disparaît rapidement et seule reste la seconde qui correspond au régime permanent (on ne s'occupe pas des conditions initiales).

On s'attend à des résonances. Il paraît probable que si le père pousse l'escarpolette sur laquelle se trouve son gosse, son action sera plus efficace si les poussées se font à une fréquence voisine de celle de l'oscillation.

## ➤ L'électricité

### Oscillations libres d'un circuit RLC



Aux bornes de la résistance  $R$  :  $V_M - V_N = Ri$

Aux bornes du condensateur  $C$  :  $V_N - V_P = q/C$

Aux bornes de l'inductance  $L$  :  $V_P - V_M = L.di/dt$

Sens du courant :  $i = dq/dt$

Ordres de grandeur possibles :  $L = 0,15 \text{ H}$  ;  $R = 100 \Omega$   
et  $C = 10^{-9} \text{ F}$  (entre  $10^{-12}$  et  $10^{-6}$ )

$$\frac{q}{C} + R.i + L.\frac{di}{dt} = 0 \text{ en dérivant, on obtient : } \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}.i + \frac{i}{LC} = 0$$

$$\text{On retrouve l'équation bien connue avec } 2\lambda = \frac{R}{L} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Avec les valeurs précédentes,  $\omega_0 = 8000 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $f_0 = 1,3 \text{ kHz}$

L'intensité du courant peut être oscillante (c'est le cas avec les valeurs numériques choisies) ou non.

La discussion concernant l'amortissement est analogue. La résistance  $R$  est positive. Il existe toutefois des circuits pour lesquels on obtient une équation analogue avec un coefficient négatif : on parle alors de "résistance négative". Mais il s'agit de circuits particuliers où peuvent naître des oscillations spontanées.

Si  $R = 0$ , le circuit est le siège d'oscillations sinusoidales qui ne sont pas amorties. Il s'agit d'un cas idéal limite.

Les circuits RL (sans condensateur :  $C = \infty$ ) ou RC (inductance  $L = 0$ ) ne sont pas oscillants.

<sup>11</sup> On dit qu'une équation est linéaire si,  $y_1$  et  $y_2$  étant des solutions, toute combinaison de la forme  $\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2$ , quelles que soient les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , est également solution. Ce n'est évidemment pas le cas de l'équation complète qui possède, quand même, des propriétés de linéarité.

Oscillations paramétriques : La capacité (« varicap ») varie sinusoidalement<sup>12</sup> :

$$C = C_0.(1 + \varepsilon.\sin \omega t).$$

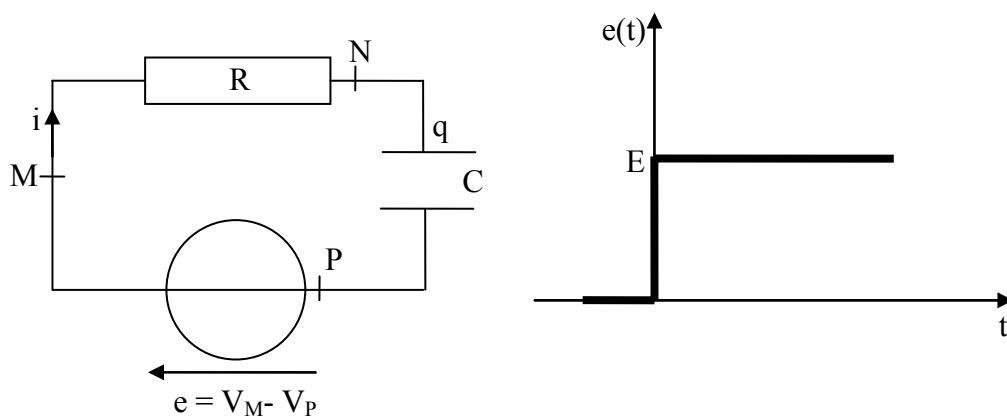
Oscillations forcées : il s'agit de circuits où on a mis une source imposant la tension

$$\text{sinusoïdale } E.\sin\omega t : \boxed{\frac{q}{C} + R.i + L.\frac{di}{dt} = E.\sin\omega t \quad \text{soit} \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}.i + \frac{i}{LC} = \frac{E\omega.\cos\omega t}{L}}$$

La solution est la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète.

Dans la pratique (c'est-à-dire avec des composants dont les caractéristiques sont réalistes), le premier terme disparaît rapidement et le second reste le seul. On peut montrer que l'intensité du courant passe par un maximum (à E donné) pour  $\omega = \omega_0$  (résonance en courant).

Attaque d'un circuit RC par un échelon de tension (RL peut être étudié de la même façon).



$$\boxed{\frac{q}{C} + R.i = e(t) \quad \text{avec} \quad i = \frac{dq}{dt}} \quad \text{sachant que, à } t = 0, e(0) = E.$$

Par ailleurs, le condensateur étant initialement déchargé, la condition initiale est  $q(0) = 0$ .

On trouve  $q(t) = CE[1 - \exp(-t/(RC))]$  et  $i = (E/R) \cdot \exp(-t/(RC))$ .

$\tau = RC$  est un temps caractéristique (constante de temps). En reprenant les valeurs précédentes,  $R = 100 \Omega$  et  $C = 10^{-9} F$ ,  $\tau = 10^{-7} s = 0,1 \mu s$ .

Curieusement, on remarque que  $i$  n'est pas nulle à  $t = 0$  (un condensateur déchargé est comme un court-circuit, disent les électriciens) :  $i(0) = E/R$ . Cette discontinuité du courant entre  $t = 0^-$  et  $0^+$  peut également être vérifiée par : à  $t = 0$ ,  $e(0) = E$  et  $u_C(0) = C.q(0) = 0$ .

L'attaque d'un circuit RL se traite de la même façon. On remarque que, pour lui,  $i(0) = 0$ , ce qui peut se justifier physiquement (pas de discontinuité de l'énergie qui donnerait le transfert d'une puissance infinie).

<sup>12</sup> Les oscillateurs paramétriques permettent la réalisation d'amplificateurs à bas bruit (amplis d'antennes, notamment). La théorie des fonctions de MATHIEU n'entre évidemment pas dans le cadre de cet exposé.

➤ **Thermodynamique**

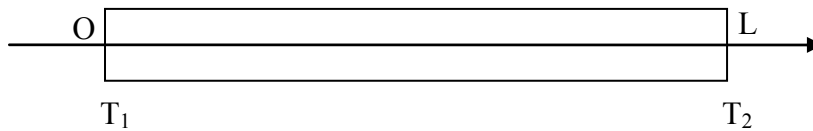
**Conduction de la chaleur** : la chaleur va du chaud vers le froid et une hypothèse raisonnable est la loi de Fourier :  $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $j_Q$  étant le vecteur densité de courant de chaleur. Il se mesure en  $W.m^{-2}$ . C'est la chaleur qui traverse l'unité de surface pendant l'unité de temps ; son flux à travers une surface S est la chaleur qui traverse S pendant l'unité de temps (puissance qui traverse S).  $\lambda$  est la conductivité thermique en  $W.m^{-1}$ .

Le bilan de transfert d'énergie donne l'équation de la chaleur  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  ou  $\frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$

$\rho$  est la masse volumique en  $kg.m^{-3}$  et  $c$  la chaleur massique, le rapport  $h = \lambda/\rho c$  est la diffusivité thermique.  $\tau = L^2/h$  est un temps caractéristique.

En régime stationnaire, le temps n'intervient pas et on obtient  $\partial^2 T/\partial x^2 = 0$ , ce qui, à une dimension, (barre de longueur L dont les extrémités sont à  $T_1$  et  $T_2$ ) est assez banal :

$$T = T_1 - (T_1 - T_2)x/L$$



En régime sinusoïdal,  $T(0, t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$ . Posons  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$  qu'on cherche sous la forme  $\theta(x, t) = \alpha(x) \cdot \exp(i\omega t)$ . On obtient :  $\frac{d^2 \alpha}{dx^2} - i \frac{\omega \alpha}{h} = 0$  avec  $r_{\pm} = \pm(1+i)\sqrt{\omega/2h}$ .

La solution en  $r_+$  est physiquement inacceptable d'où

$$T(x, t) = T_0 + \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2h}}x\right) \cdot \exp\left[i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2h}}x\right)\right]$$

**Diffusion (moléculaire)**

De même, les molécules vont des endroits où la concentration n est forte à des endroits où elle est faible d'où la loi de Fick  $j_n = -D \frac{\partial n}{\partial x}$ , D étant la diffusivité. On obtient de même :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad D \Delta n$$

Si L est une distance typique,  $\tau = L^2/D$  est un temps caractéristique du phénomène.

À la différence de l'équation d'onde (d'Alembert), les équations de diffusion et de conduction de la chaleur ne donnent pas le même rôle au temps (1<sup>er</sup> ordre) et à la variable d'espace (2<sup>nd</sup> ordre) : il n'y a pas de possibilité de propagation sans déformation du signal.

## ➤ Électromagnétisme

Les équations de Maxwell donnent des équations aux dérivées partielles.

### Régime stationnaire

Supposons qu'on cherche le potentiel  $V(x, y, z)$  dans une cavité parallélépipédique (exemple : un four) en régime stationnaire (le temps n'intervient pas) :  $\square V = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$ .

On cherche  $V$  sous la forme  $V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) / Z(z)$ .

$\Delta V = 0$ . On divise par  $V$  et on obtient  $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$

Chaque terme de la somme dépend d'une variable différente. Pour que la somme soit nulle, il faut que chaque terme soit égal à une constante, positive ou négative :

- négative : on obtient des solutions sinusoïdales  $X = A \cdot \cos \alpha x + B \cdot \sin \alpha x$

- positive : des solutions exponentielles qu'il est parfois utile de chercher sous une forme de cosinus et de sinus hyperboliques.

La géométrie de la cavité permet de terminer la recherche.

### Propagation d'une onde

Le fait que la divergence soit nulle dans le vide permet de limiter la forme des solutions cherchées. Une onde monochromatique sinusoïdale de pulsation  $\omega$  dont le champ électrique reste parallèle à  $Ox$  et qui se propage dans le sens des  $z$  croissants dans un guide parallélépipédique est cherchée sous la forme :  $\vec{E} = E(x, y) \cdot \exp i(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_x$

$\text{div} \vec{E} = 0$  donne  $\vec{E} = E(y) \cdot \exp i(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_x$  et  $\square \vec{E} = 0 \Rightarrow E''(y) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(y) = 0$

La discussion sur le signe du coefficient de  $E(y)$  et les conditions aux limites permettent de trouver l'expression du champ.

## ➤ Une question importante et 2 exemples moins classiques

Ce dernier paragraphe aborde une question cruciale pour le physicien et propose deux exemples originaux mais un peu délicats dans lesquels intervient une équation différentielle.

### L'équation différentielle étudiée est-elle bien celle qui régit le comportement du système ?

Le physicien peut avoir des doutes et doit mettre en évidence des écarts éventuels entre les résultats des mesures et ceux de la théorie.

Pour prendre un exemple, l'oscillateur le plus simple est l'oscillateur harmonique. Si on choisit le cas de la mécanique, la force de rappel est supposée proportionnelle à l'écart à l'équilibre. L'étude donne l'équation  $m x'' = -kx$  que l'on écrit  $x'' + \omega_0^2 x = 0$ .

La solution générale est de la forme  $x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $\forall A$  et  $\forall \varphi$ .

Le montage est réalisé.

On peut commencer par vérifier si la période du mouvement est réellement indépendante de l'amplitude des oscillations. Ce n'est pas le cas pour le pendule pesant<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> Rappelons que la période du pendule pesant (dont la position est repérée par l'angle  $\theta$  qu'il fait avec la verticale) vaut approximativement  $T = T_0 \cdot [1 + (\theta m)^2 / 16]$ ,  $T_0$  étant la période du pendule simple associé et  $\theta m$

Les outils modernes de mesure (analyseurs de spectres) permettent d'examiner le caractère sinusoïdal de l'enregistrement obtenu, c'est-à-dire la présence (et l'importance) ou l'absence d'harmoniques. On constate souvent la présence de celui de pulsation  $3\omega_0$  qui n'était pas prévue.

Un moyen assez courant de perfectionner le modèle est d'ajouter un terme non linéaire dans l'expression de la force de rappel. Des considérations de symétrie permettent éventuellement d'éliminer l'hypothèse de l'existence d'un terme quadratique. Celle d'un terme cubique<sup>14</sup> est raisonnable : on s'intéresse à l'équation :  $x'' + \omega_0^2 x + ax^3 = 0$ .

Le terme cubique est supposé petit, ce qui va permettre certaines approximations.

On écrit donc  $x(t)$  sous la forme  $x(t) = y(t) + u(t)$ ,  $u(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$  étant la solution harmonique de pulsation  $\omega_0$  et  $y(t)$ , supposé constamment petit, l'écart à cette oscillation.

On obtient  $y'' + \omega_0^2 y + a(u + y)^3 = 0$ . Le terme cubique étant un terme correctif, il peut être estimé assez grossièrement : on néglige<sup>15</sup>  $y$  devant  $u$  et on obtient  $y'' + \omega_0^2 y + au^3 = 0$  soit

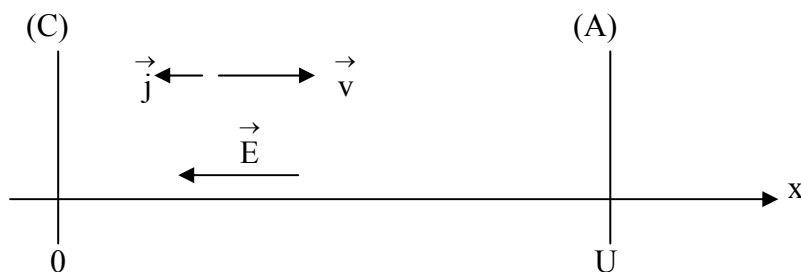
$$y'' + \omega_0^2 y = -a \cdot A^3 \cdot \cos^3 \omega_0 t \text{ qui s'écrit aussi } y'' + \omega_0^2 y = -a \cdot \frac{A^3}{4} \cdot (3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t).$$

La solution peut être cherchée sous la forme d'une combinaison linéaire d'oscillations harmoniques  $B \cdot \cos(\omega_0 t)$  et  $C \cdot \cos(3\omega_0 t)$ . La présence de l'harmonique  $3\omega_0$  est ainsi justifiée<sup>16</sup>. Il reste à trouver la signification physique du terme en  $x^3$  dans l'expression de la force.

### **Plasma** (caractéristique d'une diode à géométrie plane)

On a une enceinte avec une cathode (C) et une anode (A) distantes de  $a = 4$  mm. Des électrons de charge  $-e$  sont arrachés à (C) et vont vers (A) : densité de charge  $\rho$ ,  $n$  électrons par  $m^3$ ,  $v$  la vitesse et  $V$  le potentiel :  $\vec{E} = -\text{grad}V$ .  $\vec{j}$  est le vecteur densité de courant.

Potentiel anode cathode :  $U = 1$  kV [ $V(a) = U$ ], surface des électrodes  $S = 0,5$  cm<sup>2</sup>.



l'amplitude maximale de l'oscillation. Un montage et des mesures soignés peuvent mettre en évidence le caractère non harmonique des oscillations du pendule (le terme de rappel est en  $\sin\theta$ , donc non proportionnel à  $\theta$ ). Le montage doit être soigné parce que le terme correctif, qui est faible, doit évidemment être inférieur aux incertitudes de mesure. Or, lorsque l'amplitude du mouvement est grande, les frottements sont importants. La technique habituelle, qui consiste à faire la mesure sur un grand nombre de périodes et diviser ainsi l'incertitude, ne peut donc pas être utilisée ici. Dans la pratique, on doit se contenter d'un petit (3 ou 4) nombre de périodes, ce qui oblige à mettre en œuvre un chronométrage de qualité (millième de seconde).

<sup>14</sup> Pour le pendule pesant, conformément au développement du sinus, ce terme est le plus important après le terme linéaire. Dans une certaine mesure, cette équation représente donc assez bien le comportement du pendule. Plus généralement, on suppose qu'on peut développer la fonction force en puissance de  $x$  et se limiter aux premiers termes.

<sup>15</sup> Si  $a$  et  $y(t)$  sont des infiniment petits d'ordre 1, les termes  $ay$ ,  $ay^2$  et  $ay^3$  obtenus après développement de  $(u+y)^3$  sont des infiniment petits d'ordres respectifs 2, 3 et 4.

<sup>16</sup> On ne s'occupe pas de la résonance sur le fondamental. L'absence de frottement, supposée dans un but de simplification, est évidemment irréaliste. L'introduction d'un tel terme ne change d'ailleurs pas le raisonnement.

$$\left[ \begin{array}{l} \vec{j} = -ne \vec{v} = \rho \vec{v} \\ \text{théorème de l'énergie cinétique } \frac{1}{2} m \cdot v^2 = eV \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \end{array} \right. \quad \vec{j} = -\frac{I}{S} \cdot \vec{e}_x \Rightarrow j = -\frac{I}{S}$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{et} \quad \rho = -\frac{I}{Sv} \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{-1/2} = 0$$

$$E \cdot \frac{dE}{dV} - k \cdot V^{-1/2} = 0 \Rightarrow E^2 = 4kV^{1/2} + C \Rightarrow E = -2\sqrt{k} \cdot V^{1/4}$$

$$V^{-1/4} \cdot \frac{dV}{dx} = 2\sqrt{k} \Rightarrow \frac{4}{3} V^{3/4} = 2\sqrt{k} \cdot x \Rightarrow V^{3/4} = \frac{3}{2} \sqrt{k} \cdot x$$

$$U^{3/4} = \frac{3}{2} \sqrt{k} \cdot a \quad \text{donne} \quad \boxed{I = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{a^2} \cdot U^{3/2}}$$

Pour  $U = 1 \text{ kV}$ ,  $S = 0,5 \text{ cm}^2$  et  $a = 4 \text{ mm}$ ,  $\frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \epsilon_0 = 2,35 \times 10^{-6} \text{ SI} \Rightarrow I = 0,232 \text{ A}$

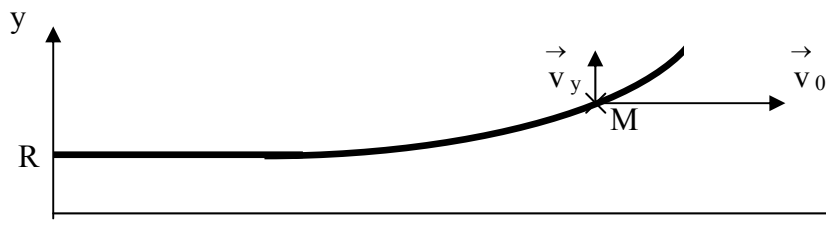
Résultat raisonnable pour un tube à vide ayant ces dimensions.

### Élargissement d'un faisceau électronique

en l'absence de champ extérieur, effets magnétiques négligés

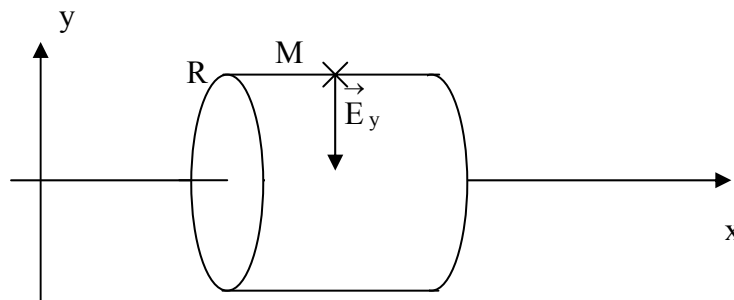
Les électrons ont tous au départ la vitesse  $\vec{v}_0$  parallèle à l'axe des  $x$  et forment un faisceau cylindrique à base circulaire de rayon  $R$ .

Le faisceau s'élargit sous l'effet des répulsions électroniques.



On souhaite déterminer la génératrice (courbe  $x, y$ ) de la surface de révolution ainsi engendrée. Pour simplifier, on admet que le champ électrique en tout point est radial et que l'élargissement étant relativement faible, les électrons conservent la même composante  $v_0$  du vecteur vitesse sur  $Ox$ .

La densité volumique de charge  $\rho$  ( $\rho < 0$ ) est la même en tout point d'une section droite du faisceau. Soit un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, 0)$  à la périphérie du faisceau.



Champ à symétrie radiale : flux à travers la surface latérale.

$$|I| = \iint j \cdot d\Sigma = \iint \rho v d\Sigma = \rho v \pi y^2 \Rightarrow \rho = -\frac{I}{\pi y^2 v_0}$$

Le flux du champ  $\Phi = \iint E_y \cdot 2\pi y \cdot \delta x = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi y^2 \cdot \delta x \Rightarrow E_y = \frac{\rho}{2\epsilon_0} y$

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-e}{m} E_y = -\frac{e \rho y}{2m\epsilon_0} = \frac{eI}{2\pi m \epsilon_0 v_0 \cdot y} \text{ de la forme } y'' = \frac{A}{y} \text{ avec } A = \frac{eI}{2\pi m \epsilon_0 v_0} .}$$

Équation incomplète  $p = y' \Rightarrow y'' = p \cdot \frac{dp}{dy} \Rightarrow p \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{A}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} dp^2 = Ad[\text{Ln}(y)] \Rightarrow p^2 = 2A \text{Ln} \frac{y}{R}$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2A} \cdot \sqrt{\text{Ln} \frac{y}{R}} \text{ On pose } y = R e^{\xi^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2\xi R e^{\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{dt} \Rightarrow \sqrt{2A} \cdot \sqrt{\text{Ln} \frac{y}{R}} = 2\xi R e^{\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{dt}$$

$$\sqrt{2A} = 2R e^{\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{dt} \Rightarrow t = \frac{2R}{\sqrt{2A}} \int_0^{\xi} e^{w^2} \cdot dw$$

D'où les équations paramétriques cherchées :

$$\boxed{\begin{cases} x = v_0 t = v_0 \cdot \frac{2R}{\sqrt{2A}} \int_0^{\xi} e^{w^2} \cdot dw \\ y = R \cdot e^{\xi^2} \end{cases}}$$

On cherche à calculer la distance  $x$  parcourue par le faisceau électronique lorsque le rayon du faisceau, initialement égal à  $R = 2 \text{ cm}$  a été multiplié par 2.

On prend  $v_0 = 5,9 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour une intensité de faisceau  $I = 2,5 \text{ A}$ .

$$e^{(\sqrt{\text{Ln}2})^2} = 2 ; A = \frac{eI}{2\pi m \epsilon_0 v_0} = 1,34 \times 10^{14} \text{ SI}$$

$$t = \frac{2R}{\sqrt{2A}} \cdot \int_0^{\xi=\sqrt{\text{Ln}2}} e^{w^2} dw = \frac{2 \times 0,02}{\sqrt{2 \times 1,34 \times 10^{14}}} \varphi(\sqrt{\text{Ln}2}) = 2,62 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

$$\Rightarrow x = v_0 t = 5,9 \times 10^7 \times 2,62 \times 10^{-9} \text{ s} = 0,155 \text{ m} . \text{ Élargissement rapidement important.}$$

Jean-François LE BOURHIS