La proportionnalité, cela n'existe pas, cela ne peut pas exister. Ou les rapports entre proportionnalité, similitude et linéarité

(document destiné à ramener certains à une certaine réalité)

Deux grandeurs proportionnelles se ressemblent beaucoup (quand on double l'une, on double l'autre) : elles se comportent tellement l'une comme l'autre qu'un simple changement d'unités suffit à les rendre numériquement identiques[1].

A bien y réfléchir, dans la (vraie) vie, le changement d'unités est le seul cas où il y a réellement proportionnalité. C'est en effet une simple opération (un jeu) mathématique. Mais, dès qu'on s'intéresse aux objets plus concrets, aux grandeurs plus complexes, il en va autrement. On peut imaginer une figure 10 fois plus grande, on ne peut pas le faire pour un système réel.

D'abord, on sait que le prix n'est jamais proportionnel à la quantité.

➢ Limites des modèles

Peut-on trouver des grandeurs physiques, c'est-à-dire plus concrètes, proportionnelles ? Oui, mais seulement en première approximation et cela correspond toujours à une modélisation.

Finalement, non, si on affine et si on y réfléchit.

Pour une substance donnée, la masse est-t-elle proportionnelle au volume ? Oui, à condition que l'échantillon ne soit pas trop gros. Mais l'homogénéité de la substance ne pourra pas être garantie au-delà d'une certaine taille et, la matière étant compressible[2], la masse volumique (ou la densité) sera plus importante dans la partie inférieure, c'est-à-dire vers le bas.

Pendant le développement d'un être vivant, la taille et le « poids » ne sont pas proportionnels. Le montant des impôts n'est pas proportionnel au revenu. Il ne fait pas 2 fois plus chaud dans un endroit à 20°C que dans un autre à 10°C [3]. Une automobile miniature (traditionnellement au 1/43ème) n'est pas homothétique au véhicule réel (voir l'épaisseur des vitres et des tôles). Une grosse étoile n'est pas une petite « en plus gros » : les réactions nucléaires, la température, le rayonnement, … ne sont pas les mêmes.

Et, aux élections législatives françaises, la représentation ne se fait pas « à la proportionnelle ».

Les trois cas les plus connus de proportionnalité étudiés en physique, classiques ponts aux ânes imposés à des générations d'élèves, sont

1. **L'allongement x d'un ressort sous l'action d'une force** $\vec{F}$: $F = k.x$
2. **La tension U aux bornes d'un conducteur** (dit résistance ou ohmique) **et l'intensité I du courant qui le traverse** : $U = R.I$
3. **L'aimantation M d'un matériau ferromagnétique** (comme le fer) **et le champ magnétique appliqué** : $M = \chi.B$

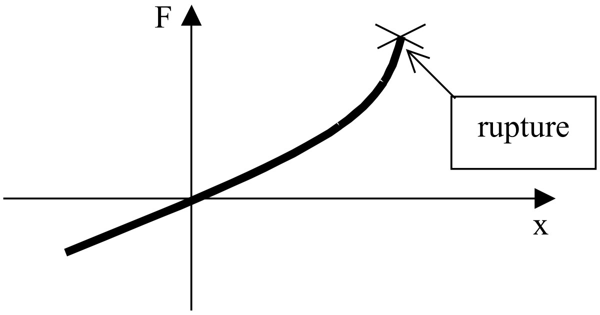
A chaque fois, la proportionnalité ne peut être qu'approximative et limitée à un certain domaine.

[1] En particulier, deux oscillations (sinusoïdales) proportionnelles sont en phase.

[2] Les liquides et les solides réels sont compressibles, c'est-à-dire qu'ils diminuent de volume quand on les comprime. Les techniciens qui envoient des liquides dans les puits de mine savent bien que l'eau est compressible.

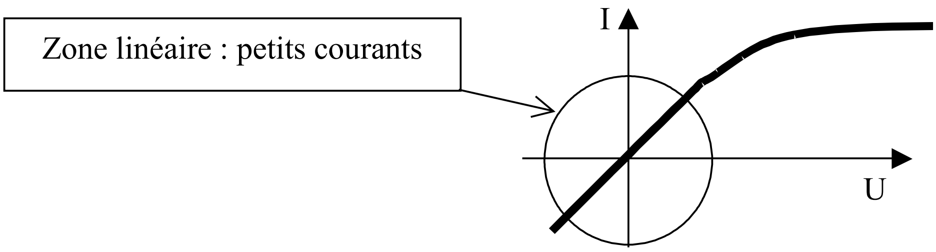
[3] La température Celsius n'est pas une température thermodynamique.

- Dans le premier cas, **le ressort** (métallique) doit rester élastique.



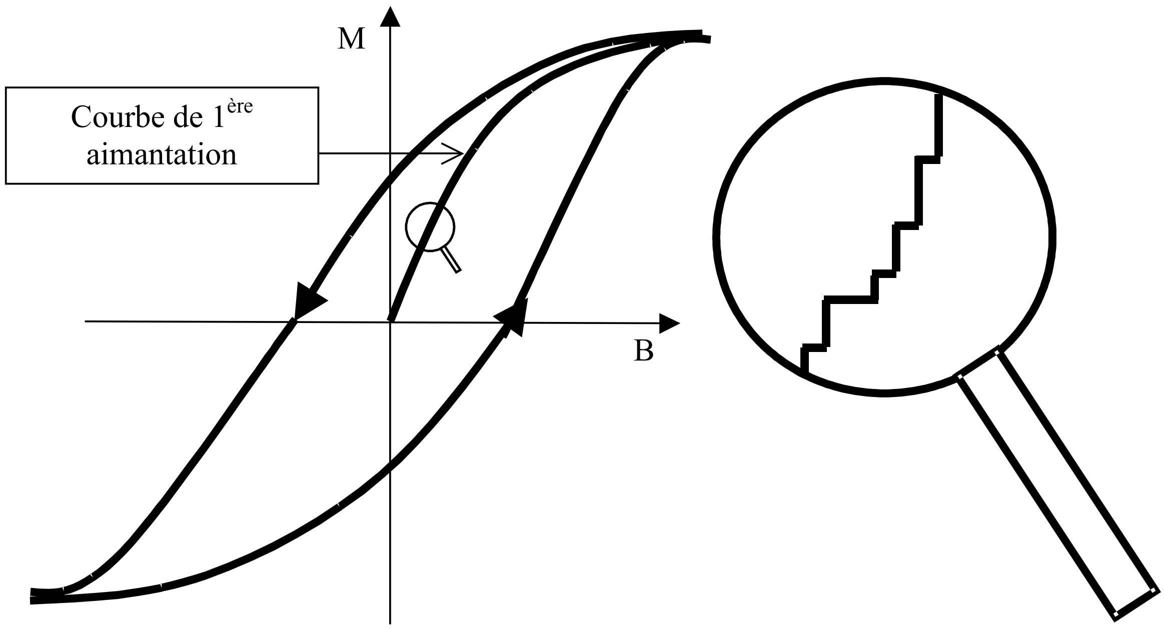
S'il est trop détendu, les liaisons chimiques sont modifiées car les atomes (ou les ions) sont trop éloignés. Cela se traduit par un arrondissement de la courbe F(x), l'apparition d'une asymptote (ou de quelque chose qui y ressemble car on n'y arrive pas toujours) et enfin d'une rupture donc de la suppression du phénomène.
En outre, la courbe est-elle réellement symétrique par rapport à l'origine ? On peut en douter car la modification du cristal de la substance par rapprochement des atomes (ou des ions) et par éloignement ne sont pas des phénomènes identiques (l'écrasement ne ressemble pas à ce qui précède la rupture). Les forces électriques qui s'exercent entre les ions qui constituent la carcasse du métal ne sont pas linéaires en fonction de la distance (forces de Coulomb en $1/r^2$).

- Dans le cas de **la résistance électrique**, lorsque le courant devient trop important, la matière chauffe et ses propriétés sont modifiées. En outre, on peut penser que les électrons en mouvement vont davantage interagir, « se gêner ». Bref, pour avoir un courant double, il faut alors plus que doubler la tension. C'est le phénomène de saturation.



Mais supposons qu'on se limite aux petits courants, qu'on les laisse passer très peu de temps et qu'on soigne les mesures. On obtient une série de couples de valeurs (I, U) qu'on porte sur deux axes. On demande à Excel le « fit » c'est-à-dire la meilleure droite. Si on ne force pas la valeur (0, 0), la droite obtenue ne passe jamais par l'origine. Il s'en faut souvent d'assez loin et l'ordonnée à l'origine est supérieure aux incertitudes de mesure. En revanche si on cherche $U = U_0 + R.I + kI^3$, en général U_0 est, lui, inférieur.
On peut d'ailleurs se poser d'autres questions. Par exemple, traditionnellement, ampèremètre et voltmètre sont au départ le même appareil. Vérifier ainsi que U et I sont proportionnels, n'est-ce pas vouloir à toute force une proportionnalité ?

- Avec **l'aimantation**, il est possible de faire apparaître d'autres propriétés qui sont très générales.



Non contente de ne pas être droite (χ fonction de B), la courbe se dédouble et l'évolution M(B) n'est pas la même à champ B croissant et à champ décroissant. C'est le phénomène d'hystérésis qui existe également (faible) pour les ressorts métalliques et (forte) pour les élastiques en polymères.
C'est que l'augmentation de l'aimantation se fait par alignement de domaines non microscopiques qui se gênent les uns les autres dans leur rotation (on peut, après amplification, entendre un craquement [4]) et, lorsque le champ est suffisant, tous les domaines sont alignés : il y a saturation. Et la courbe de première aimantation (on part de zéro), celle qui ressemble le plus à une droite, vue à la loupe, révèlerait une croissance par petits paliers. Bref, il y a tout là-dedans sauf de la proportionnalité.
Ce phénomène de dédoublement (hystérésis) est très général. On peut montrer que l'énergie perdue par cycle est proportionnelle à l'aire du cycle. Et là, on est dans la thermodynamique, c'est-à-dire dans la vraie physique. Mais l'hystérésis, c'est aussi la mémoire parce que le retour en arrière se souvient de ce qui a été fait avant. Cette propriété était utilisée dans les ordinateurs des vieilles générations (avec des tores magnétiques). On la réalise maintenant avec des bascules électroniques[5].
En se satisfaisant d'un trop haut degré de généralité, on peut avancer que la proportionnalité entre grandeurs physiques réellement différentes correspond à des phénomènes statiques ou quasi-statiques ou stationnaires, lents, réversibles, non dissipatifs, sans mémoire ni turbulence, dans lesquels les entités élémentaires (molécules) sont sans interaction [6]. On comprend qu'une telle modélisation laisse les physiciens sur leur faim.
Finalement, la proportionnalité et, plus généralement, les modèles linéaires correspondent à des approximations « rustiques », autrefois largement utilisées parce qu'elles donnaient des calculs

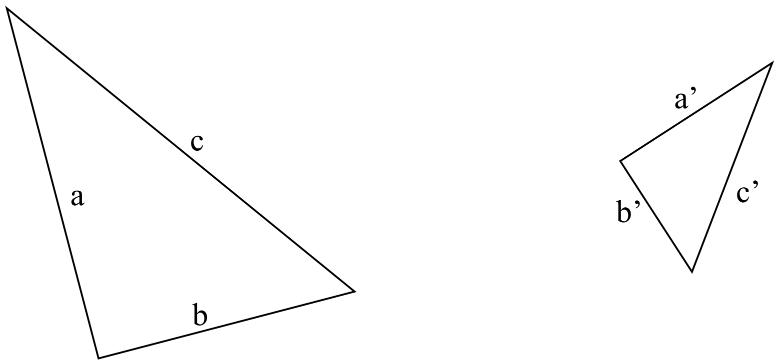
[4] Ce sont les domaines de WEISS.et l'effet BARKHAUSEN.
[5] Triggers (de SCHMIDT)
[6] C'est en particulier le cas pour le gaz parfait pour lequel la pression et le volume sont inversement proportionnels (loi de BOYLE-MARIOTTE) : p.v = n.RT. Le gaz parfait n'existe pas plus que les autres concepts imaginés pour avoir des lois simples. Et on peut faire les mêmes remarques sur la proportionnalité inverse que sur la proportionnalité (directe).

qu'on pouvait souvent résoudre analytiquement [7]. Les outils modernes de calcul [8] en ont réduit l'intérêt.

➢ Proportionnalité et similitude

Ces deux notions sont fortement corrélées : les dimensions correspondantes de 2 objets semblables sont proportionnelles.

- Examinons de plus près **la similitude géométrique** : 2 triangles de côtés a, b et c, a', b' et c' semblables (imaginons qu'on ne les a pas retournés) ont la même allure :



On a d'une part, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ et d'autre part $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = m$, $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = n$ et $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = p$

La première double égalité traduit le fait que le triangle de gauche est plus grand. Au sens de l'optique, le rapport est le grandissement (et non le grossissement).
Mais les autres égalités sont plus intéressantes. Les 3 nombres m, n et p, sans dimension (des mètres divisés par des mètres) caractérisent la forme, le fait que les figures sont pointues, plates, écrasées, … Ils sont identiques pour les 2 objets (triangles).

- **Impossibilité de la similitude géométrique dans la vraie vie (physique, biologie, ..)**

Peut-on imaginer sur la Terre un monde 2 fois plus grand dans les 3 dimensions : les animaux seraient 2 fois plus grands, les cellules 2 fois plus grandes, les moteurs 2 fois plus gros ?
Non bien sûr. Certaines propriétés sont volumiques : la masse donc le poids, la consommation d'énergie seraient multipliés par 8. D'autres comme le refroidissement des machines et des animaux, les fuites, le rayonnement sont des propriétés de surface et seraient multipliées par 4.
Un moteur de 2 litres de cylindrée n'est jamais le double d'un moteur de 1 litre.
Il y a en outre des données comme la pesanteur et la résistance des matériaux qui font qu'un monde double n'est pas imaginable (les os des êtres vivants souffriraient encore plus que dans notre monde). Le cas des girafes, des baleines et des dinosaures est d'ailleurs un cas limite.
Dans la taille des animaux, la pesanteur joue un rôle essentiel (après un voyage dans l'espace, les astronautes reviennent grandis de plusieurs centimètres).

➢ Généralisation

- **Similitude physique** (analyse dimensionnelle).

Y aurait-il donc quand même, pour les systèmes plus complexes que sont les systèmes physiques (sans parler des êtres vivants), quelque chose d'analogue à la similitude des figures géométriques ?

[7] au point que la relation (« loi ») d'OHM U = R.I a pu paraître fondamentale à des générations d'élèves.
[8] Ils utilisent en général des algorithmes de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 alors que la proportionnalité apparaît en quelque sorte comme d'ordre 0 ou 1.

Le physicien anglais Osborne REYNOLDS, à la fin du XIXème siècle, a eu une idée qu'on peut qualifier de géniale car elle s'est avérée très féconde. Il s'est demandé s'il n'est pas possible d'imaginer des systèmes en quelque sorte semblables mais dont la similitude ne serait pas seulement géométrique. Il l'a fait dans une partie de la physique dont l'étude s'est révélée particulièrement ardue et rétive, la dynamique des fluides.
Reynolds introduit donc des rapports sans dimension (comme les nombres m, n et p, rapports de formes, dont l'unité est des mètres sur des mètres, donc des « rien du tout ») qui sont donc des nombres purs. Pour un fluide de viscosité cinématique ν qui coule dans un tuyau de diamètre d à la vitesse V, le rapport $\mathfrak{R} = \frac{V.d}{\nu}$ (appelé nombre de Reynolds) est un nombre pur (sans dimension)[9].
L'expérience montre que deux systèmes très différents (ex. de l'eau dans un tuyau et un jet d'air incident sur un pilier) avec même nombre de Reynolds ont des comportements analogues. Ils sont analogues, semblables si l'on veut [10].
L'idée de Reynolds s'est avérée utile, surtout lors d'une première approche de phénomènes complexes, c'est-à-dire dépendant d'un grand nombre de paramètres. On cite souvent l'anecdote suivante : Theodor von Karmann, un des plus grands hydrodynamiciens du XXème siècle, visitant un laboratoire, a pu montrer aux physiciens qui y travaillaient, qu'ils étudiaient depuis dix ans le même système à une homothétie (au sens de Reynolds) près.
La propriété dont Reynolds a eu l'intuition a été généralisée sous le nom de théorème Π [11].

- **Limites**

Le fait que la viscosité du fluide intervienne semble condamner les maquettes (imaginer une maquette de la baie du Mont St Michel avec de la glycérine … ! En plus, on ne dispose pas d'une panoplie de liquides de viscosités réglables) ou, en tous cas, rend leur emploi délicat. Si on touche aux dimensions géométriques, il faut modifier les vitesses et/ou la viscosité et d'une façon générale, les paramètres physiques.
De même, par exemple, les maquettes des bâtiments utilisées en sismologie sont d'une utilisation délicate, si on veut des résultats quantitatifs. Il faudrait changer à la fois les dimensions des objets, les caractéristiques mécaniques des matériaux et les spectres des signaux excitateurs.
Suivant les phénomènes, d'autres nombres analogues à celui de Reynolds ont été introduits par la suite : nombres de (Reech-)Froude, de Taylor, de Prandtl, de Péclet, de Strouhal, …
Le problème est qu'on ne peut pas en général respecter la valeur de tous ces nombres et la similitude n'est qu'approchée. Par exemple, dans un bassin de carène, on teste un bateau de largeur d, de longueur L dans un fluide de vitesse V et de viscosité ν, l'accélération de la pesanteur étant g.
On a toujours le nombre de Reynolds $\mathfrak{R} = \frac{V.d}{\nu}$ et aussi le nombre de Froude $F = \frac{V}{\sqrt{g.L}}$ (lui aussi sans dimension : c'est évident $m.s^{-1}.(m.s^{-2})^{-1/2}.m^{-1/2}$).
La maquette et la réalité ne peuvent pas avoir mêmes nombres de Reynolds et de Froude. On suppose en général que le second est plus important. On est alors très éloigné d'une véritable et simple homothétie (donc proportionnalité).

- **Impossibilité de la linéarité**

Les phénomènes dépendant du temps les plus courants sont régis par des équations différentielles (ou aux dérivées partielles) ou des systèmes de ces équations.
Une équation différentielle est dite linéaire si elle possède la propriété : si x(t) est solution, k.x(t) $\forall$k l'est aussi. Si on connaît une solution, toute fonction proportionnelle à cette solution est aussi une solution.

---

[9] Admettons le !
[10] La signification physique du nombre de Reynolds comme rapport de deux flux de quantités de mouvement (flux convectif sur flux diffusif) a été trouvée ultérieurement.
[11] ou théorème de VASCHY-BUCKINGHAM.

Une telle équation ne permet pas de déterminer l'amplitude (arbitraire) d'un phénomène. On dit d'ailleurs souvent que c'est la non-linéarité qui fixe l'amplitude (de l'oscillation par exemple)[12].
Il est vrai que dans les systèmes mécaniques ou électriques très schématisés qu'on étudie au lycée, l'étude des conditions initiales permet de trouver l'amplitude. Mais quelles sont les conditions initiales pour la houle océanique ? Sans qu'on puisse parler de proportionnalité, on a bien le sentiment que ce sont la vitesse du vent, la température, la gravité, la masse volumique de l'eau, la profondeur de la mer, … qui fixent la hauteur des vagues (voir les vagues dites scélérates, les solitons, les tsunamis ainsi que la violence des cyclones sur Jupiter).
Les équations de la mécanique des fluides [13], en particulier, sont non-linéaires.
Les équations non-linéaires présentent des caractéristiques bien gênantes [14], en particulier celle de n'être pratiquement jamais solubles analytiquement.

- **Le temps** est évidemment une grandeur particulière.

Les changements obtenus quand on multiplie le temps par un nombre arbitraire k ne sont pas abordés ici. Mais on peut se demander ce qui se passe quand k = -1, c'est-à-dire quand on renverse le temps.
Il s'avère que les équations différentielles (du 1er ordre) valables à l'échelle microscopique, ont la propriété troublante d'être invariantes quand on change t en –t. Elles sont réversibles. Or, la vie de tous les jours ne présente évidemment pas cette propriété[15]. Et il en est de même des phénomènes physiques moins complexes que la vie (fatigue des matériaux, en particulier). Concilier la réversibilité des phénomènes microscopiques et l'irréversibilité évidente des phénomènes macroscopiques reste pour les physiciens un chantier en ce début de XXIème siècle.

J-F LE BOURHIS

[12] La linéarité de l'équation de Schrödinger (qui gouverne les phénomènes à l'échelle de l'atome) choquait beaucoup Louis de Broglie qui a longtemps et vainement cherché une équation non-linéaire.
[13] équations de NAVIER-STOKES.
[14] stabilité, robustesse, tendance au chaos, …
[15] Il est plus facile de vieillir que de rajeunir !